数理解析研究所講究録
210巻 1974年 58-60

von Neumann 代数の構成

東北大 理　菊池武雄

$(\mathcal{Z}, \mathcal{C}, \nu)$ を確率空間とし、Bool代数は可付番基底をもつとする。$(Y(z), \mathcal{B}(z), \mu(z;\cdot))$, $z \in \mathcal{Z}$ を確率空間の集合とし、各 $\mathcal{B}(z)$ は可付番基底をもつとする。$X = \bigcup_{z \in Z} Y(z)$ とおく。X の subset B に対して、$\pi(z;B) = B \cap Y(z)$ とおく。$\mathcal{B}_0$ を X の subset の可付番個の族で、次の条件を充たすとする。

(I-1) $\mathcal{B}_0$ は Bool 代数である。

(I-2) $\pi(z;B) \in \mathcal{B}(z)$, $B \in \mathcal{B}_0$ for a.e. z

(I-3) $\mu(z;\pi(z;B))$, $B \in \mathcal{B}_0$ は z の関数として可測である。

(I-4) $\mathcal{B}(z)$ は $\pi(z;B)$, $B \in \mathcal{B}_0$ により生成される。

$\mu(B) = \int \mu(z;\pi(z;B))\,d\nu(z)$ によって、$\mathcal{B}_0$ に測度を入れる。$\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}_0$ により生成される σ-ring とし μ を $\mathcal{B}$ 上に拡張する。

H を可分な Hilbert 空間とし、M を II_1-factor として

H 上に standard に表現されているとする。 $H(x)$, $x\in X$ を可分な Hilbert 空間とし、V_x を H から $H(x)$ への onto isometry とする。 $M(x) = V_x M V_x^{-1}$ とおく。まぎらわしくない時は、$M(x)$ の元を M の元とみることがある。 $\mathcal{H} = \int^{\oplus} H(x)\, d\mu(x)$ を canonical な基底による direct integral とする。各 $z\in Z$ に対して $Y(z)$ の任意の二元 α, β に対して、$H(\alpha)$ から $H(\beta)$ への onto isometry の族 $\mathfrak{U}(\beta,\alpha)$ が定義されていて次の条件を充すとする。

(II-1) $u M(\alpha) u^{-1} = M(\beta)$, $u\in \mathfrak{U}(\beta,\alpha)$

(II-2) $\mathfrak{U}(\alpha,\beta) = \mathfrak{U}(\beta,\alpha)^{-1}$

(II-3) $\mathfrak{U}(\gamma,\beta)\,\mathfrak{U}(\beta,\alpha) = \mathfrak{U}(\gamma,\alpha)$

$\alpha\in Y(z)$, $\beta\in Y(z')$ $z \neq z'$ の時は、$\mathfrak{U}(\beta,\alpha)$ は $H(\alpha)$ から $H(\beta)$ への 0-operator のみから成るものとする。

$u(\beta,\alpha)$ を $\mathfrak{U}(\beta,\alpha)$ の代表元として一つ固定する。$\{a(\beta,\alpha)\}$ $a(\beta,\alpha)\in M$ が次の条件を充す時 $\{a(\beta,\alpha)\}$ は bounded operator を表現するという。

(III-1) $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して $(a(\beta,\alpha)u(\beta,\alpha)\xi(\alpha) \mid \eta(\beta))$ が $(\alpha,\beta)\in X\times X$ の可測函数である。

(III-2) $\iint |(a(\beta,\alpha)u(\beta,\alpha)\xi(\alpha) \mid \eta(\beta))|\, d\mu(\alpha)\, d\mu(\beta) < \infty$

(III-3) ある定数 K があって

$$|\iint (a(\beta,\alpha)u(\beta,\alpha)\xi(\alpha) \mid \eta(\beta))\, d\mu(\alpha)\, d\mu(\beta)| \leqq K\|\xi\|\|\eta\|$$

bounded operator a が $\{a(\beta,\alpha)\}$ の形で表されていれば $b(\beta,\alpha) = u(\alpha,\beta)^{-1} a(\alpha,\beta)^* u(\alpha,\beta)$ とおくとき a^* は $\{b(\beta,\alpha)\}$ の形に表されることが分る。更に次のような条件をおくと、このような operator の全体は $*$-algebra になる。

(IV) 殆ど全ての $\alpha \in X$ に対して定数 $K(\alpha)$ が
が存在して、$\xi \in H$ に対して

$$\|[a(\dot\beta,\alpha)u(\dot\beta,\alpha)\xi]\| \leqq K(\alpha)\|\xi\|,$$

$$\|\int a(\beta,\alpha)u(\beta,\alpha)\xi(\alpha)\,d\mu(\alpha)\| \leqq K(\beta)\|\xi\|$$

ここで $\cdot$ はそれを変数とみるという意味である。

一般に a_n が上のような形に表現され、a_n が a に強収束しても a は上のような形になるとは限らない。